Problema 3.01. ()
A partir das equações básicas de campo elétrico e campo magnético

$$\vec{E} = E_0(r,\phi)e^{j(wt-\beta z)}$$

$$\vec{H} = H_0(r,\phi)e^{j(wt-\beta z)}$$

aplique o rotacional das Equações de Maxwell e obtenha seis equações para relacionar os campos $E_r, E_\phi, E_z, H_r, H_\phi, H_z$.

Como o problema está sendo trabalhado em coordenadas cilíndricas, o rotacional também deve ser tratado como tal. Resolvendo as equações de Maxwell têm-se que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \rightarrow \frac{1}{r}\begin{bmatrix} \vec{r} & r\vec{\phi} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & rE_\phi & E_z \end{bmatrix} = -j\omega\mu(\vec{r}H_r + \vec{\phi}H_\phi + \vec{z}H_z) \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \rightarrow \frac{1}{r}\begin{bmatrix} \vec{r} & r\vec{\phi} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\phi & H_z \end{bmatrix} = j\omega\epsilon(\vec{r}E_r + \vec{\phi}E_\phi + \vec{z}E_z) \tag{2}$$

Abrindo a matriz da Equação (1), obtém-se que

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_z}{\partial \phi} + jr\beta E_\phi\right) = -j\omega\mu H_r \tag{3}$$

$$j\beta E_r + \frac{\partial E_z}{\partial r} = j\omega\mu H_\phi \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rE_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial (E_r)}{\partial \phi}\right) = -j\omega\mu H_z \tag{5}$$

Fazendo o mesmo para a Equação (2), obtém-se

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + jr\beta H_\phi\right) = j\omega\epsilon E_r \tag{6}$$

$$j\beta H_r + \frac{\partial H_z}{\partial r} = -j\omega\epsilon E_\phi \tag{7}$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial (H_r)}{\partial \phi}\right) = j\omega\epsilon E_z \tag{8}$$

Problema 3.02. ()
Com as equações obtidas do exercício anterior, calcule os campos E_r, E_ϕ, H_r, H_ϕ em função das componentes E_z e H_z.

Separando a componente H_ϕ da Equação (6), é obtido

$$jH_\phi = j\frac{\epsilon\omega}{\beta}E_r - \frac{1}{\beta r}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} \text{ que, subtituindo em (4), temos}$$

$$j\beta E_r + \frac{\partial E_z}{\partial r} = \omega\mu\left(j\frac{\epsilon\omega}{\beta}E_r - \frac{1}{\beta r}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}\right)$$

Resolvendo então E_r, e utilizando $q^2 = \omega^2\epsilon\mu - \beta^2$

$$E_r = -\frac{j}{q^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\mu\omega}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}\right) \tag{9}$$

Separando a componente H_r na Equação (7)

$$jH_r = -j\frac{\epsilon\omega}{\beta}E_\phi - \frac{1}{\beta}\frac{\partial H_z}{\partial r} \text{ que, subtituindo em (3), temos}$$

$$j\beta E_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} = -\omega\mu\left(-j\frac{\epsilon\omega}{\beta}E_\phi - \frac{1}{\beta}\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)$$

Resolvendo então E_ϕ, e utilizando $q^2 = \omega^2\epsilon\mu - \beta^2$

$$E_\phi = -\frac{j}{q^2}\left(\frac{\beta}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \mu\omega\frac{\partial H_z}{\partial r}\right) \tag{10}$$

Separando a componente E_r da Equação (6), é obtido

$$jE_r = \frac{1}{\epsilon\omega}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + jr\beta H_\phi\right) \text{ que, subtituindo em (4), temos}$$

$$\frac{\beta}{\epsilon\omega}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + jr\beta H_\phi\right) + \frac{\partial E_z}{\partial r} = j\omega\mu H_\phi$$

Resolvendo então H_ϕ, e utilizando $q^2 = \omega^2\epsilon\mu - \beta^2$

$$H_\phi = -\frac{j}{q^2}\left(\frac{\beta}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \epsilon\omega\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) \tag{11}$$

Separando a componente E_ϕ na Equação (7)

$$jE_\phi = -\frac{1}{\epsilon\omega}\left(j\beta H_r + \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) \text{ que, subtituindo em (3), temos}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\beta}{\epsilon\omega}\left(j\beta H_r + \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) = -j\omega\mu H_r$$

Resolvendo então H_r, e utilizando $q^2 = \omega^2\epsilon\mu - \beta^2$

$$H_r = -\frac{j}{q^2}\left(\beta\frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\epsilon\omega}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi}\right) \tag{12}$$

Problema 3.03. ()
Considerando os Modos Linearmente Polarizados, onde $\Delta << 1$, prove que

$$k_1^2 \approx k_2^2 \approx \beta^2$$

onde k_1 é a constante de propagação do núcleo e k_2 a constante de propagação da casca.
O parâmetro Δ é dado pela equação

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

assim, quando $\Delta << 1 \rightarrow n_1 \approx n_2$.
Sabendo então que os valores de β devem estar no intervalo

$$n_2 k = k_2 \leq \beta \leq k_1 = n_1 k$$

Se $n_1 \approx n_2 \rightarrow k_1 \approx k_2$, então

$$k_1 \leq \beta \leq k_2 \longrightarrow k_1 \approx \beta \approx k_2 \rightarrow k_1^2 \approx \beta^2 \approx k_2^2$$

Problema 3.04. ()
Mostre que, para o caso de $\Delta << 1$, a abertura numérica (NA) pode ser aproximada pela equação

$$NA = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} \approx n_1\sqrt{2\Delta}$$

Como dito no exercício anterior, para o caso de $\Delta << 1 \rightarrow n_1 \approx n_2$. Assim, partindo do princípio, temos

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{(n_1 + n_2)(n_1 - n_2)}$$

Como $n_1 \approx n_2 \rightarrow n_1 + n_2 \approx 2n_1$. Então

$$NA = \sqrt{2n_1(n_1 - n_2)} = \sqrt{2n_1^2 \frac{n_1 - n_2}{n_1}} \rightarrow NA = n_1\sqrt{2\frac{n_1 - n_2}{n_1}} = n_1\sqrt{2\Delta}$$

Problema 3.05. ()
Uma fibra multimodo de abertura numérica NA = 0.2, suporta aproximadamente 1000 modos para comprimento de onda 850nm.

a. *Qual é o diâmetro do núcleo?*
O número total de modos M que essa fibra suporta pode ser visto na Equação

$$M = \frac{2\pi^2 a^2}{\lambda^2}(n_1^2 - n_2^2) = \frac{2\pi^2 a^2}{\lambda^2}(NA)^2 \tag{13}$$

Sendo a o raio do núcleo, este pode ser calculado

$$a = \left(\frac{M}{2}\right)^{1/2} \frac{\lambda}{\pi NA} = \left(\frac{1000}{2}\right)^{1/2} \frac{0.85 \times 10^{-6}}{0.2\pi} = 30.25\mu m$$

Portanto, o diâmetro possue $60.5\mu m$

b. *Quantos modos essa fibra suporta em 1320nm?*
Utilizando o mesmo raio do núcleo $a = 30.25\mu$m, utiliza-se a Equação (13) para obter

$$M = \frac{2\pi^2(30.25 \times 10^{-6})^2}{(1.32 \times 10^{-6})^2}(0.2)^2 = 414$$

c. *Quantos modos essa fibra suporta em 1550nm?*

$$M = \frac{2\pi^2(30.25 \times 10^{-6})^2}{(1.55 \times 10^{-6})^2}(0.2)^2 = 300$$

Problema 3.06. (Agrawal)
Uma fibra mono-modo com

$$n_1 - n_2 = 0.05$$

possui $n_1 = 1.45$. *Calcule o raio do núcleo a para o caso da fibra possuir um comprimento de onda de corte de* $1\mu m$

A condição para a fibra ser monomodo é que $V < 2.405$. Usando o caso de V = 2,405,

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda_c}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 2,405$$

Assim, calcula-se o raio dessa fibra que deve ser

$$a = \frac{2,405 \times 1\mu m}{2\pi\sqrt{1,45^2 - 1,445^2}} = 3,18\mu m$$

Problema 3.07. ()
Considere uma fibra de $50\mu m$ *de diâmetro, índice do núcleo* $n_1 = 1,45$ *e índice da casca* $n_2 = 1,49$ *operando em* $\lambda = 1,31\mu m$.

a. *Qual é a abertura numérica (NA) dessa fibra?*
A abertura numérica é definida como

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0.173$$

b. *Quantos modos essa fibra suporta?*
Primeiro calcula-se o valor do número V para a fibra

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \frac{2\pi a}{\lambda}NA$$

Note que $2a$ é o diâmetro da fibra, portanto $V = 20,7$.
Para saber o número de modos M que a fibra suporta, usamos a relação

$$M = \frac{V^2}{2} = 214.2$$

que mostra que essa fibra suporta 215 modos.

c. *De quanto seria o alargamento do pulso devido à dispersão modal após ele ser transmitido 10km?*

O alargamento do pulso devido à dispersão moda pode ser descrito como

$$\Delta\tau_{modal} = \frac{n_1 L}{c}\Delta, \text{ onde } \Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

Colocando os valores, temos a resposta

$$\Delta\tau_{modal} = \frac{1.5 \times 10\text{km}}{3 \times 10^5\text{km/s}} 6,67 \times 10^{-3} = 333\text{ns}$$

Problema 3.08. ()
O atraso de grupo por km de uma fibra monomodo pode ser descrita como

$$\frac{\tau(\lambda)}{L} = \frac{\tau_0}{L} + S_0\lambda_0^2(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} + ln(\frac{\lambda}{\lambda_0}))$$

onde λ_0 é o comprimento de onda com zero dispersão e S_0 é a inclinação da dispersão para λ_0. Calcule o alargamento do pulso para o caso da fibra ser alimentada por uma fonte de largura espectral σ_λ.

Para esse problema, o alargamento do pulso pode ser calculado pela equação

$$\sigma_g = \frac{d\tau_g}{d\lambda} = -\frac{L\sigma_\lambda}{2\pi c}\left(2\lambda\frac{d\beta}{d\lambda} + \lambda^2\frac{d^2\beta}{d\lambda^2}\right) \tag{14}$$

O problema desse exercício é encontrar as derivadas de β em função de λ. Para isso, é conhecido que o atraso de grupo é da forma

$$\frac{\tau_g(\lambda)}{L} = \frac{1}{V_g} = \frac{1}{c}\frac{d\beta}{dk} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c}\frac{d\beta}{d\lambda} \text{ onde } V_g \text{ é a velocidade de grupo}$$

Assim é possível derivar a primeira derivada de β através da equação fornecida pelo exercício como

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{\tau_0}{L} + S_0\lambda_0^2\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} + ln\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\right) \tag{15}$$

Derivando a Equação (15) em função de λ, obtém-se que

$$\frac{d^2\beta}{d\lambda^2} = \frac{2\pi c}{\lambda^3}\left(\frac{2\tau_0}{L} + S_0\lambda_0^2\frac{3\lambda_0 - 2\lambda}{\lambda} + 2ln\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right) - 1\right) \tag{16}$$

A resposta pode ser então obtida, utilizando as Equações (15) e (16) na Equação (14).

Problema 3.09. ()
Considerando a equação relacionando o ângulo crítico $\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$, onde n_1 é o índice de refração do núcleo e n_2 da casca, prove que

$$\cos\theta_c = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1}$$

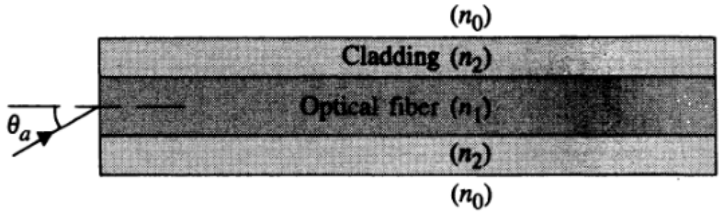

Figura 1: Figura para o exercício 1.05

Conforme mostra a Figura (1), partindo da relação que existe um ângulo máximo de incidência θ_a e o meio n_0 é o ar, podemos calcular que

$$n_0 \sin\theta_a = n_1 \sin(90^o - \theta_c) = n_1 \cos\theta_c$$

$$n_0 \sin\theta_a = n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_c} = n_1\sqrt{1-(\frac{n_2}{n_1})^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$sin\theta_a = \frac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{n_o}$$

E como,

$$n_0 \sin\theta_a = n_1 \cos\theta_c \to \cos\theta_c = \frac{n_0}{n_1}\sin\theta_a$$

É obtido que

$$\cos\theta_c = \frac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{n_1}$$

Problema 3.10. ()
Para a fibra da imagem abaixo, derive a equação transcedental.

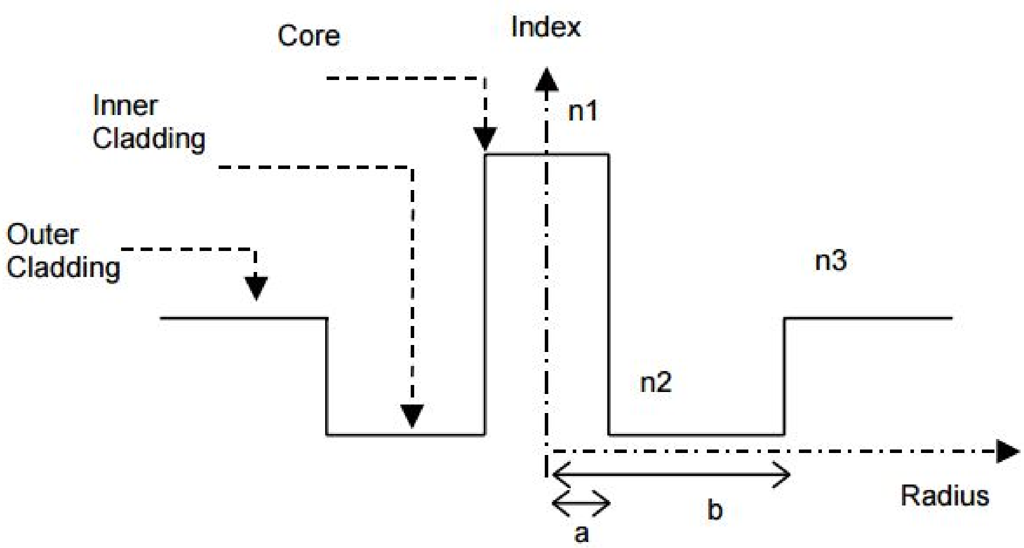

Figura 2: Fibra para o exercício 10

Considerando o caso de $n_2 < n_{eff}$, têm-se que

- Em n_1 há oscilação, então $u_1 = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}$ e o campo segue a Função Bessel J da Figura (3)
- Em n_2 não há oscilação, então $u_2 = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}$ e o campo segue a Função Bessel I da Figura (4) e K da Figura (5)
- Em n_1 não há oscilação, então $u_3 = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_3^2}$ e o campo segue a Função Bessel K da Figura (5)

Para o caso de $n_2 > n_{eff}$, então o campo em n_2 também iria oscilar enquanto decai. Assim seria necessário escrever esse campo em relação à Função Bessel J e da Função Bessel Y, que está na Figura (6).

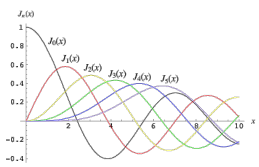

Figura 3: Função Bessel J

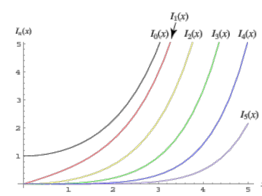

Figura 4: Função Bessel I

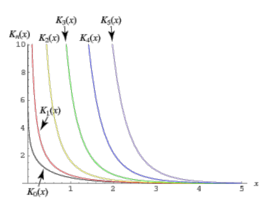

Figura 5: Função Bessel K

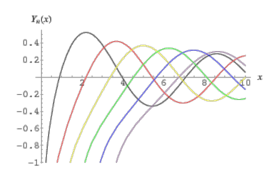

Figura 6: Função Bessel Y

Utilizando o modo onde $n_2 < n_{eff}$, devemos escrever as equações de E_z, H_z, E_ϕ, H_ϕ para cada uma das 3 regiões e em seguida aplicar as equações de contorno. O termo $e^{j(wt-\beta z)}$ não será escrito pois estará em todos os campos e será cancelado no fim.

Conforme calculados no exercício (2) dessa lista de exercício, os campos H_ϕ, E_ϕ podem ser calculados através das Equações abaixo:

$$E_\phi^{(n)} = -\frac{j}{u_n^2}\left(\frac{\beta}{r}\frac{\partial E_z^{(n)}}{\partial \phi} - \mu\omega\frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r}\right) \tag{17}$$

$$H_\phi^{(n)} = -\frac{j}{u_n^2}\left(\frac{\beta}{r}\frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial \phi} + \epsilon\omega\frac{\partial E_z^{(n)}}{\partial r}\right) \tag{18}$$

1 Região 0<r<a

$$E_z^{(1)} = A_1 J_m(u_1 r/a) e^{jm\phi}$$
$$H_z^{(1)} = A_2 J_m(u_1 r/a) e^{jm\phi}$$
$$E_\phi^{(1)} = \frac{-j}{u_1^2}\left(\frac{\beta}{r} jmA_1 J_m(u_1 r/a) - \omega\mu\frac{u_1}{a} A_2 J_m^{'}(u_1 r/a)\right)$$
$$H_\phi^{(1)} = \frac{-j}{u_1^2}\left(\frac{\beta}{r} jmA_2 J_m(u_1 r/a) + \omega\epsilon\frac{u_1}{a} A_1 J_m^{'}(u_1 r/a)\right)$$

2 Região a < r < b

$$E_z^{(2)} = \left(B_1 I_m(u_2 r/b) + C_1 K_m(u_2 r/b)\right) e^{jm\phi}$$
$$H_z^{(2)} = \left(B_2 I_m(u_2 r/b) + C_2 K_m(u_2 r/b)\right) e^{jm\phi}$$
$$E_\phi^{(2)} = \frac{-j}{u_2^2}\left(\frac{\beta jm}{r}\left(B_1 I_m(u_2 r/b) + C_1 K_m(u_2 r/b)\right) - \frac{\omega\mu u_2}{b}\left(B_2 I_m^{'}(u_2 r/b) + C_2 K_m^{'}(u_2 r/b)\right)\right)$$
$$H_\phi^{(2)} = \frac{-j}{u_2^2}\left(\frac{\beta jm}{r}\left(B_2 I_m(u_2 r/b) + C_2 K_m(u_2 r/b)\right) + \frac{\omega\epsilon u_2}{b}\left(B_1 I_m^{'}(u_2 r/b) + C_1 K_m^{'}(u_2 r/b)\right)\right)$$

3 Região r > b

$$E_z^{(3)} = D_1 K_m(u_3 r/b) e^{jm\phi}$$
$$H_z^{(3)} = D_2 K_m(u_3 r/b) e^{jm\phi}$$
$$E_\phi^{(3)} = \frac{-j}{u_3^2}\left(\frac{\beta}{r} jmD_1 K_m(u_3 r/b) - \omega\mu\frac{u_3}{b} D_2 K_m^{'}(u_3 r/b)\right)$$
$$H_\phi^{(3)} = \frac{-j}{u_3^2}\left(\frac{\beta}{r} jmD_2 K_m(u_1 r/b) + \omega\epsilon\frac{u_3}{b} D_1 K_m^{'}(u_3 r/b)\right)$$

4 Condição de contorno em r=a

Sendo $c = \frac{a}{b}$, calcula-se para E_z que

$$E_z^{(1)}(r=a) = E_z^{(2)}(r=a) \rightarrow A_1 J_m(u_1) = B_1 I_m(u_2 c) + C_1 K_m(u_2 c)$$

$$\boxed{A_1 = \frac{I_m(u_2 c)}{J_m(u_1)} B_1 + \frac{K_m(u_2 c)}{J_m(u_1)} C_1} \tag{19}$$

Para H_z,

$$H_z^{(1)}(r=a) = H_z^{(2)}(r=a) \rightarrow A_2 J_m(u_1) = B_2 I_m(u_2 c) + C_2 K_m(u_2 c)$$

$$\boxed{A_2 = \frac{I_m(u_2c)}{J_m(u_1)}B_2 + \frac{K_m(u_2c)}{J_m(u_1)}C_2} \tag{20}$$

Para E_ϕ, $E_\phi^{(1)}(r=a) = E_\phi^{(2)}(r=a)$, então

$$\frac{-j}{u_1^2}\left(\frac{\beta}{a}jmA_1J_m(u_1) - \omega\mu\frac{u_1}{a}A_2J_m^{'}(u_1)\right) =$$

$$= \frac{-j}{u_2^2}\left(\frac{\beta jm}{a}\Big(B_1I_m(u_2c) + C_1K_m(u_2c)\Big) - \frac{\omega\mu u_2}{b}\left(B_2I_m^{'}(u_2c) + C_2K_m^{'}(u_2c)\right)\right)$$

Substituindo A_1 e A_2 e simplificando a equação para

$$J_m\hat{(}x) = \frac{J_m^{'}(x)}{xJ_m^{(}x)}$$

têm-se que

$$\left(\frac{\beta jmI_m(u_2c)}{a}\left(\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_2^2}\right)\right)B_1 + \omega\mu\left(\frac{I_m^{'}(u_2c)}{u_2b} - \frac{I_m(u_2c)\hat{J}_m(u_1)}{a}\right)B_2 + ... \tag{21}$$

$$... + \left(\frac{\beta jmK_m(u_2c)}{a}\left(\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_2^2}\right)\right)C_1 + \omega\mu\left(\frac{K_m^{'}(u_2c)}{u_2b} - \frac{K_m(u_2c)\hat{J}_m(u_1)}{a}\right)C_2 = 0$$

Para H_ϕ, $H_\phi^{(1)}(r=a) = H_\phi^{(2)}(r=a)$, então

$$\frac{-j}{u_1^2}\left(\frac{\beta}{a}jmA_2J_m(u_1) + \omega\epsilon\frac{u_1}{a}A_1J_m^{'}(u_1)\right) =$$

$$= \frac{-j}{u_2^2}\left(\frac{\beta jm}{a}\Big(B_2I_m(u_2c) + C_2K_m(u_2c)\Big) + \frac{\omega\epsilon u_2}{b}\left(B_1I_m^{'}(u_2c) + C_1K_m^{'}(u_2c)\right)\right)$$

Reciprocamente ao

$$\left(\frac{\beta jmI_m(u_2c)}{a}\left(\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_2^2}\right)\right)B_2 - \omega\epsilon\left(\frac{I_m^{'}(u_2c)}{u_2b} - \frac{I_m(u_2c)\hat{J}_m(u_1)}{a}\right)B_1 + ... \tag{22}$$

$$... + \left(\frac{\beta jmK_m(u_2c)}{a}\left(\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_2^2}\right)\right)C_2 - \omega\epsilon\left(\frac{K_m^{'}(u_2c)}{u_2b} - \frac{K_m(u_2c)\hat{J}_m(u_2)}{a}\right)C_1 = 0$$

5 Condição de contorno em r=b

Para E_z,

$$E_z^{(2)}(r=b) = E_z^{(3)}(r=b) \rightarrow B_1I_m(u_2) + C_1K_m(u_2) = D_1K_m(u_3)$$

$$\boxed{D_1 = \frac{I_m(u_2)}{K_m(u_3)}B_1 + \frac{K_m(u_2)}{K_m(u_3)}C_1} \tag{23}$$

Para H_z,

$$H_z^{(2)}(r=b) = H_z^{(3)}(r=b) \rightarrow B_2 I_m(u_2) + C_2 K_m(u_2) = D_2 K_m(u_3)$$

$$\boxed{D_2 = \frac{I_m(u_2)}{K_m(u_3)}B_2 + \frac{K_m(u_2)}{K_m(u_3)}C_2} \tag{24}$$

Para E_ϕ, $E_\phi^{(2)}(r=b) = E_\phi^{(3)}(r=b)$, então

$$\frac{-j}{u_2^2}\left(\frac{\beta jm}{b}\Big(B_1 I_m(u_2) + C_1 K_m(u_2)\Big) - \frac{\omega\mu u_2}{b}\Big(B_2 I_m^{'}(u_2) + C_2 K_m^{'}(u_2)\Big)\right)$$
$$= \frac{-j}{u_3^2}\left(\frac{\beta}{b}jmD_1 K_m(u_3) - \omega\mu\frac{u_3}{b}D_2 K_m^{'}(u_3)\right)$$

Encontra-se então

$$\left(\frac{\beta jm I_m(u_2)}{b}\left(\frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{u_3^2}\right)\right)B_1 - \frac{\omega\mu}{b}\left(\frac{I_m^{'}(u_2)}{u_2} - I_m(u_2)\hat{K_m}(u_3)\right)B_2 + ... \tag{25}$$
$$... + \left(\frac{\beta jm K_m(u_2)}{b}\left(\frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{u_3^2}\right)\right)C_1 - \frac{\omega\mu}{b}\left(\frac{K_m^{'}(u_2)}{u_2} - K_m(u_2)\hat{K_m}(u_3)\right)C_2 = 0$$

E, por último, calcula-se para o campo magnético H_ϕ, onde $H_\phi^{(2)}(r=b) = H_\phi^{(3)}(r=b)$, então

$$\frac{-j}{u_2^2}\left(\frac{\beta jm}{b}\Big(B_2 I_m(u_2) + C_2 K_m(u_2)\Big) + \frac{\omega\epsilon u_2}{b}\Big(B_1 I_m^{'}(u_2) + C_1 K_m^{'}(u_2)\Big)\right) =$$
$$= \frac{-j}{u_3^2}\left(\frac{\beta}{b}jmD_2 K_m(u_3) + \omega\epsilon\frac{u_3}{b}D_1 K_m^{'}(u_3)\right)$$

Reajeitando a equação acima, têm-se que

$$\left(\frac{\beta jm I_m(u_2)}{b}\left(\frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{u_3^2}\right)\right)B_2 - \frac{\omega\epsilon}{b}\left(\frac{I_m^{'}(u_2)}{u_2} - I_m(u_2)\hat{K_m}(u_3)\right)B_1 + ... \tag{26}$$
$$... + \left(\frac{\beta jm K_m(u_2)}{b}\left(\frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{u_3^2}\right)\right)C_2 + \frac{\omega\epsilon}{b}\left(\frac{K_m^{'}(u_2)}{u_2} - K_m(u_2)\hat{K_m}(u_3)\right)C_1 = 0$$

Finalmente, é possível escrever em forma matricial as equações (21), (22), (25) e (26). Em seguida, se obtém o determinante dessa matriz que será a equação transcendental dessa fibra tipo-W.

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta j m I_m(u_2c)}{a}\left(\frac{1}{u_1^2}-\frac{1}{u_2^2}\right) & \omega\mu\left(\frac{I_m'(u_2c)}{u_2b}-\frac{I_m(u_2c)\hat{J_m}(u_1)}{a}\right) & \frac{\beta j m K_m(u_2c)}{a}\left(\frac{1}{u_1^2}-\frac{1}{u_2^2}\right) & \omega\mu\left(\frac{K_m'(u_2c)}{u_2b}-\frac{K_m(u_2c)\hat{J_m}(u_1)}{a}\right) \\ -\omega\epsilon\left(\frac{I_m'(u_2c)}{u_2b}-\frac{I_m(u_2c)\hat{J_m}(u_1)}{a}\right) & \frac{\beta j m I_m(u_2c)}{a}\left(\frac{1}{u_1^2}-\frac{1}{u_2^2}\right) & -\omega\epsilon\left(\frac{K_m'(u_2c)}{u_2b}-\frac{K_m(u_2c)\hat{J_m}(u_2)}{a}\right) & \frac{\beta j m K_m(u_2c)}{a}\left(\frac{1}{u_1^2}-\frac{1}{u_2^2}\right) \\ \frac{\beta j m I_m(u_2)}{b}\left(\frac{1}{u_2^2}-\frac{1}{u_3^2}\right) & -\frac{\omega\mu}{b}\left(\frac{I_m'(u_2)}{u_2}-I_m(u_2)\hat{K_m}(u_3)\right) & \frac{\beta j m K_m(u_2)}{b}\left(\frac{1}{u_2^2}-\frac{1}{u_3^2}\right) & -\frac{\omega\mu}{b}\left(\frac{K_m'(u_2)}{u_2}-K_m(u_2)\hat{K_m}(u_3)\right) \\ -\frac{\omega\epsilon}{b}\left(\frac{I_m'(u_2)}{u_2}-I_m(u_2)\hat{K_m}(u_3)\right) & \frac{\beta j m I_m(u_2)}{b}\left(\frac{1}{u_2^2}-\frac{1}{u_3^2}\right) & \frac{\omega\epsilon}{b}\left(\frac{K_m'(u_2)}{u_2}-K_m(u_2)\hat{K_m}(u_3)\right) & \frac{\beta j m K_m(u_2)}{b}\left(\frac{1}{u_2^2}-\frac{1}{u_3^2}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$